

**Межпредметная физико-математическая олимпиада школьников
3 марта 2024 г.**

8 класс

М1. Какой цифрой оканчивается разность $43^{43} - 17^{17}$?

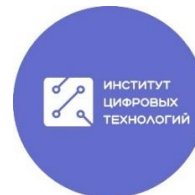
М2. Решите уравнение $26x^2 + y^2 - 10xy - 2x + 1 = 0$.

Ф1. В термосе находится вода при температуре $t_0 = 20^{\circ}\text{C}$, масса воды в два раза меньше массы термоса. Туда доливают такую же массу горячей воды, что и была в термосе, при температуре $t = 80^{\circ}\text{C}$, и после установления теплового равновесия температура содержимого термоса стала равна $t_1 = 40^{\circ}\text{C}$. Определить удельную теплоемкость термоса, если удельная теплоемкость воды равна $c_{\text{в}} = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}^{\circ}\text{C}}$.

Ф2. Найти силу постоянного тока, протекающего по проводнику, и его плотность, если известно, что через сечение проводника площадью 10см^2 за 16с по нему прошло 10^{17} элементарных зарядов.

МФ1. Из пункта A в пункт B и из пункта B в пункт A вышли одновременно два неутомимых студента, которые встретились в пункте C в 12 часов дня. Продолжая движение, они прибыли в свои пункты назначения соответственно в 4 часа и в 9 часов вечера. Определите, когда началось путешествие.

ФМ2. Спутник движется по круговой орбите с постоянной скоростью. Во сколько раз изменится скорость движения спутника, если радиус орбиты вращения увеличить на 50%. Время движения, как в первом, так и во втором случае, принять одинаковым. Замечание: длина орбиты вычисляется по формуле $l = 2\pi R$, $\pi \approx 3,14$.



7 класс

М1. Что больше 17^{97} или 63^{64} ? Сравните числа без калькулятора.

М2. Решите уравнение $||x - 386| + 5| = 7$.

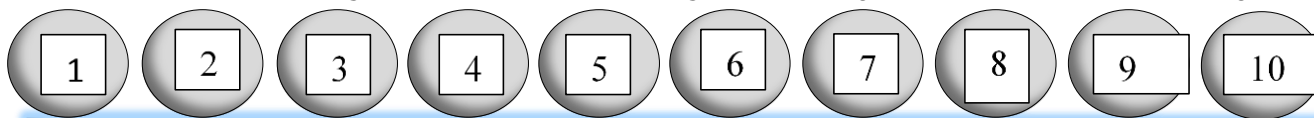
Ф1. Автобус длиной 10 м едет по прямой дороге со скоростью 45 км/ч, а грибник идет вдоль этой дороги в лес, в том же направлении, со скоростью 1,5 м/с. За какое время автобус догонит и обгонит грибника, если первоначальное расстояние между передними фарами автобуса и грибником составляет 100 м (вдоль направления движения)?

Ф2. На плот, плавающий на поверхности жидкости плотностью $\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, помещают груз неизвестной плотности и объема равному объему вытесненной жидкости. Найти плотность груза, если глубина погружения плота увеличилась вдвое.

ФМ1. Пароход из Волгограда до Астрахани плывет трое суток, а назад - четверо. Сколько суток будет плыть плот от Волгограда до Астрахани?

ФМ2. На столе лежат одинаковые по объёму детали, массы которых равны:

$m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$, $m_4 = 5m$, $m_5 = 8m$, $m_6 = 13m$, $m_7 = 21m$, $m_8 = 34m$.



Найти отношение плотностей материалов, из которых изготовлена десятая деталь к плотности материала, из которого изготовлена девятая деталь.

Решения и примерные критерии оценивания решения

М1. Что больше 17^{97} или 63^{64} ? Сравните числа без калькулятора.

Решение. $17^{97} > 16^{97} = (2^4)^{97} = 2^{388} \Rightarrow 17^{97} > 2^{388}$

$$63^{64} < 64^{64} = (2^6)^{64} = 2^{384} \Rightarrow 63^{64} < 2^{384}$$

$$17^{97} > 2^{388} > 17^{97} > 2^{388} > 63^{64} \Rightarrow 17^{97} > 63^{64}$$

Критерии оценивания задачи М1

0 - задача не решена; отсутствует правильная идея решения задачи; приведен правильный ответ без обоснования

3 – сделана попытка сравнить числа с одинаковым основанием, рассуждения не доведены до конца

5 – выстроена правильная цепочка рассуждений, сделан вывод

М2. Решите уравнение $||x - 386| + 5| = 7$.

Решение. $|x - 386| + 5 = 7$ или $|x - 386| + 5 = -7$

$$|x - 386| = 2 \quad \text{или} \quad |x - 386| = -12$$

$$x - 386 = 2, \quad \text{нет корней}$$

$$x - 386 = -2$$

$$x = 388; \quad x = 384.$$

Критерии оценивания задачи М2

0 - задача не решена; отсутствует правильная идея решения задачи,

1-2 – правильные рассуждения, но задача не доведена до конца,

5- верно выполненное задание

ФМ1. Пароход из Волгограда до Астрахани плывет трое суток, а назад - четверо. Сколько суток будет плыть плот от Волгограда до Астрахани?

Решение. Пусть x суток плывет плот. Тогда плот за сутки проходит $1/x$ часть пути. Пароход проходит за сутки по течению $1/3$ часть пути, против – $1/4$ часть пути. Имеем уравнение $\frac{1}{3} - \frac{1}{x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{x} \Rightarrow x = 24$.

Критерии оценивания задачи МФ1

0 - задача не решена; отсутствует правильная идея решения задачи,

1-2 – правильные рассуждения, но задача не доведена до конца,

5- верно выполненное задание (по действиям, составлено и решено уравнение)

Ф1. Автобус длиной 10 м едет по прямой дороге со скоростью 45 км/ч, а грибник идет вдоль этой дороги в лес, в том же направлении, со скоростью 1,5 м/с. За какое время автобус догонит и обгонит грибника, если первоначальное расстояние между передними фарами автобуса и грибником составляет 100 м (вдоль направления движения)?

Решение: Пусть $v_1 = 45 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 12,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ – скорость автобуса, $v_2 = 1,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ – скорость грибника, тогда $v = v_1 - v_2 = 11 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ – скорость сближения автобуса и грибника. Автобус догонит и обгонит грибника, когда задние фары автобуса сравняются с грибником, а, следовательно,

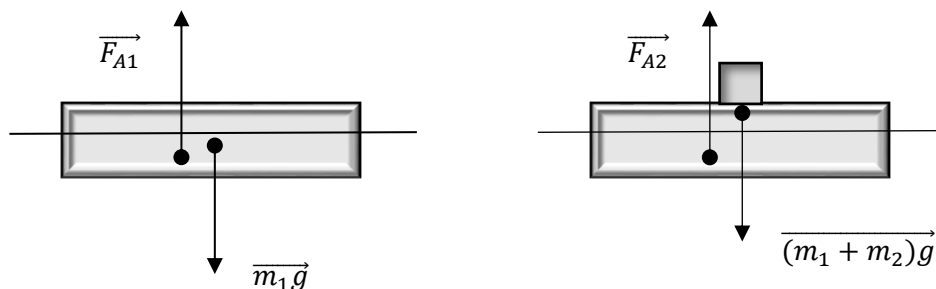
$$S = 110 \text{ м} . \text{ Тогда искомое время } t = \frac{S}{v} = 10 \text{ с}.$$

Критерии оценивания задачи Ф1

- 0- задача не решена;
- 1- отсутствует правильная идея решения задачи, но записана формула $t = \frac{S}{v}$;
- 3-записаны формулы $t = \frac{S}{v}$, $v = v_1 - v_2$;
- 5- задача решена верно, выстроена правильная цепочка рассуждений.

Ф2. На плот, плавающий на поверхности жидкости плотностью $\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, помещают груз неизвестной плотности и объема равному объему вытесненной жидкости. Найти плотность груза, если глубина погружения плота увеличилась вдвое.

Решение:



Исходя из условия задачи, можно записать: $\vec{F}_A + \vec{m}g = 0$.

Тогда последнее равенство можно записать в двух случаях в скалярной форме:

$$\begin{cases} \rho g V_1 = m_1 g, \\ \rho g V_2 = (m_1 + m_2) g. \end{cases}$$

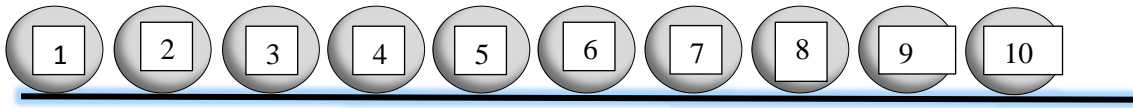
Тогда $\rho g (V_2 - V_1) = m_2 g$. Тогда по условию задачи $\rho \Delta V = \rho (V_2 - V_1) = \rho V_1 = m_2$, $\rho V_1 = m_2 = \rho_T V_1$. Следовательно, $\rho_T = \rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Критерии оценивания задачи Ф2

- 0- задача не решена;
- 1- отсутствует правильная идея решения задачи, но записаны формулы $F_A = \rho g V$, $F = m g$;
- 3-выполнен чертеж с указанием сил, записаны формулы $\rho g V_1 = m_1 g$, $\rho g V_2 = (m_1 + m_2) g$;
- 5- задача решена верно, выстроена правильная цепочка рассуждений.

ФМ2. На столе лежат одинаковые по объёму детали, массы которых равны:

$$m_1 = m, m_2 = 2m, m_3 = 3m, m_4 = 5m, m_5 = 8m, m_6 = 13m, m_7 = 21m, m_8 = 34m.$$



Найти отношение плотностей материалов, из которых изготовлена десятая деталь к плотности материала, из которого изготовлена девятая деталь.

Решение: Заметим, что начиная с третьей детали, сумма масс предыдущих двух деталей, равна массе детали. Тогда, $m_9 = m_7 + m_8 = 55m$, $m_{10} = m_8 + m_9 = 89m$. Поскольку объем одинаковый, то $V_9 = V_{10}$ или $\frac{m_9}{\rho_9} = \frac{m_{10}}{\rho_{10}}$. Откуда следует $\frac{55m}{\rho_9} = \frac{89m}{\rho_{10}}$. Получаем искомое отношение $\frac{\rho_{10}}{\rho_9} = \frac{89}{55} = 1,62$.

Критерии оценивания задачи МФ2

- 0- задача не решена;
- 1- записана формула $m = \rho V$;
- 4- найдена закономерность для масс $m_9 = 55m$, $m_{10} = 89m$;
- 5- задача решена верно, получено $\frac{\rho_{10}}{\rho_9} = \frac{89}{55} = 1,62$, выстроена правильная цепочка рассуждений.

8 класс

Решения и примерные критерии оценивания решения

М1. Какой цифрой оканчивается разность $43^{43} - 17^{17}$?

Решение. При возведении числа 43 в любую степень получаем числа, которые последовательно оканчиваются на цифры: 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1... Длина повторений равна 4, следовательно, последняя цифра числа 43^{43} такая же как 43^3 , то есть цифра 7.

При возведении числа 17 в любую степень получаем числа, которые последовательно оканчиваются на цифры: 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1... Длина повторений равна 4, следовательно, последняя цифра числа 17^{17} такая же как 17^1 , то есть цифра 7.

Следовательно, данное число оканчивается на 0.

Критерии оценивания задачи М1

0 - задача не решена; отсутствует правильная идея решения задачи; приведен правильный ответ без обоснования

2 – указано на какую цифру оканчиваются данные числа (правильная идея), но допущена ошибка или приводится правильная цифра, но без обоснования

5 – выстроена правильная цепочка рассуждений, сделан вывод

М2. Решите уравнение $26x^2 + y^2 - 10xy - 2x + 1 = 0$.

Решение.

$$26x^2 + y^2 - 10xy - 2x + 1 = 0 \Rightarrow 25x^2 + y^2 - 10xy + x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (25x^2 - 10xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) = 0 \Rightarrow (5x - y)^2 + (x - 1)^2 = 0$$

Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Значит, одновременно должны выполняться два уравнения: $(5x - y)^2 = 0$, $(x - 1)^2 = 0$. Откуда находим, что $x = 1$, $y = 5$.

Критерии оценивания задачи М2

0 - задача не решена; отсутствует правильная идея решения задачи; приведен правильный ответ без обоснования

2 – сделана попытка выделить полные квадраты

5 – правильное решение

ФМ1. Из пункта A в пункт B и из пункта B в пункт A вышли одновременно два неутомимых студента, которые встретились в пункте C в 12 часов дня. Продолжая движение, они прибыли в свои пункты назначения соответственно в 4 часа и в 9 часов вечера. Определите, когда началось путешествие.

Решение. Пусть x км/ч и y км/ч - скорости студентов, t ч - время от начала путешествия до встречи. Путь первого студента до встречи равен xt км, а путь второго студента до встречи равен yt км.

После встречи первый прошел yt/x часов, а второй xt/y часов. По условию задачи $yt/x = 4$, $xt/y = 9$. Перемножив эти уравнения, находим, $t^2 = 36$, $t = 6$. Встреча в пункте C состоялась в 12 часов дня, поэтому славное путешествие двух неутомимых студентов началось в 6 часов утра.

Критерии оценивания задачи ФМ1

0 - задача не решена; отсутствует правильная идея решения задачи

2 – составлены уравнения, но неправильно определены правые части уравнений

3 – из правильно составленных уравнений не найдено время t

4 – не указано время начало путешествия, время до встречи найдено верно

5 – правильное решение

Ф1. В термосе находится вода при температуре $t_0 = 20^{\circ}\text{C}$, масса воды в два раза меньше массы термоса. Туда доливают такую же массу горячей воды, что и была в термосе, при температуре $t = 80^{\circ}\text{C}$, и после установления теплового равновесия температура содержимого термоса стала равна $t_1 = 40^{\circ}\text{C}$. Определить удельную теплоемкость термоса, если удельная теплоемкость воды равна $c_B = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}^{\circ}\text{C}}$.

Решение: запишем уравнение теплового баланса:

$$c_T m(t_1 - t_0) + c_B \frac{m}{2}(t_1 - t_0) = c_B \frac{m}{2}(t - t_1).$$

$$\text{Преобразуем } c_T = \frac{t - 2t_1 + t_0}{2(t_1 - t_0)} c_B = 2100 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}^{\circ}\text{C}}.$$

Критерии оценивания задачи Ф1

0 - задача не решена;

3 - записана формула $Q = cm(t - t_0)$;

4 - составлено уравнение теплового баланса $c_T m(t_1 - t_0) + c_B \frac{m}{2}(t_1 - t_0) = c_B \frac{m}{2}(t - t_1)$;

5 - получена искомая формула $c_T = \frac{t - 2t_1 + t_0}{2(t_1 - t_0)} c_B = 2100 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}^{\circ}\text{C}}$.

Ф2. Найти силу постоянного тока, протекающего по проводнику, и его плотность, если известно, что через сечение проводника площадью 10см^2 за 16с по нему прошло 10^{17} элементарных зарядов.

Решение: Воспользуемся количественной характеристикой силы тока: $I = \frac{q}{t} = \frac{eN}{t}$, где $e = -1,6 * 10^{-19}\text{Кл}$. Плотность тока может быть определена по формуле $j = \frac{I}{S}$. Расчеты показывают, что $I = 1\text{мА}$, $j = 1 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}$.

Критерии оценивания задачи Ф2

0 - задача не решена;

3 - записана одна из формул $I = \frac{q}{t} = \frac{eN}{t}$, $j = \frac{I}{S}$;

5 - задача решена верно.

ФМ2. Спутник движется по круговой орбите с постоянной скоростью. Во сколько раз изменится скорость движения спутника, если радиус орбиты вращения увеличить на 50% . Время движения, как в первом, так и во втором случае, принять одинаковым. Замечание: длина орбиты вычисляется по формуле $l = 2\pi R$, $\pi \approx 3,14$.

Решение: Поскольку движение равномерное, то: $t = \frac{2\pi R}{v_1}$, $t = \frac{2\pi R(1+0,5)}{v_2}$. Приравнивая эти формулы между собой получаем, что $\frac{v_2}{v_1} = 1,5$.

Критерии оценивания задачи ФМ2

0 - задача не решена;

3 - записана формула $t = \frac{l}{v}$;

4 - записаны формулы $t = \frac{2\pi R}{v_1}$, $t = \frac{2\pi R(1+0,5)}{v_2}$;

5 - получено искомое соотношение $\frac{v_2}{v_1} = 1,5$.